

Livret des oublis et des erreurs

Classes Préparatoires ECGA2

NOM :

DES ERREURS OU OUBLIS - GENERALITES

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis
G1		Des équations, inéquations, systèmes équivalents ont les mêmes solutions. N'oubliez donc pas d'écrire « est équivalent à » ou « si et seulement si » ou plus simplement « $\Leftrightarrow$ » entre chaque étape de vos calculs.
G2		<u>Pour démontrer que deux expressions A et B sont égales vous pouvez :</u> ➤ Calculer A et tenter d'obtenir B ➤ Calculer B et tenter d'obtenir A ➤ Calculer A et obtenir une expression C puis calculer B et tenter d'obtenir la même expression C ➤ Partir de l'égalité $A = B$ et écrire <u>des égalités équivalentes</u> jusqu'à l'obtention d'une égalité que vous savez vraie. <u>Attention :</u> Vous ne pouvez pas partir de l'égalité recherchée $A = B$ sans écrire d'équivalences (« est équivalent à » ou « si et seulement si » ou plus simplement « $\Leftrightarrow$ »). <u>Pour démontrer une inégalité $A \leq B$ vous pouvez par exemple :</u> Partir de l'inégalité $A \leq B$ et écrire <u>des inégalités équivalentes</u> jusqu'à l'obtention d'une inégalité que vous savez vraie. <u>Attention :</u> Vous ne pouvez pas partir de l'égalité recherchée $A \leq B$ sans écrire d'équivalences (« est équivalent à » ou « si et seulement si » ou plus simplement « $\Leftrightarrow$ »). Bien sûr, d'autres méthodes sont possibles ...
G3		Lorsque vous écrivez <u>une hérédité</u> d'un raisonnement par récurrence, vous devez écrire : « Supposons que pour <u>un</u> entier naturel n » et non « Supposons que pour <u>tout</u> entier naturel n ». Par contre, dans la conclusion, n'oubliez d'écrire « $\forall n \in \mathbb{N}$ » (à adapter si la propriété doit être vérifiée sur un autre ensemble d'entiers)
G4		Si vous utilisez la notation $P(0)$ dans l'initialisation d'un raisonnement par récurrence, vous devez définir ce que représente $P(n)$ avant cette initialisation et non après lorsque vous voulez démontrer l'hérédité.
G5		Attention aux identités remarquables : $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$, $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ Par exemple : si $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ alors $u_{n+1}^2 \neq u_n^2 + \frac{1}{u_n^2}$. Retenez bien : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Mais aussi : $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
G6		Ne confondez pas les ensembles $\mathbb{N}$ et $\llbracket 0 ; n \rrbracket$ (quel que soit l'entier naturel n)

G7		<u>Ordre et opérations</u> Lorsque vous avez une inégalité : $A \leq B$, ➤ Vous devez changer l'ordre lorsque vous <u>multipliez ou divisez</u> les deux membres A et B <u>par un nombre strictement négatif</u>. ➤ Vous ne changez pas l'ordre dans tous les autres cas : lorsqu'on ajoute ou on retranche un même nombre réel quelconque C, lorsqu'on multiplie ou on divise par un nombre strictement positif.
G8		Si une fraction peut s'écrire sous la forme $\frac{k A}{k B}$ alors on peut simplifier son numérateur et son dénominateur par k : $\frac{\cancel{k} A}{\cancel{k} B} = \frac{A}{B}$. Mais dès que l'on ajoute ou on soustrait d'autres termes au numérateur ou/et au dénominateur on ne peut plus simplifier. <u>Exemples</u> : On ne peut pas simplifier par k les fractions : $\frac{k A - C}{k B}, \frac{k A}{k B + C}, \frac{k A + D}{k B - C}.$
G9		Lorsqu'on a des expressions de la forme $\frac{A}{B}$ ou $A \times B$ on peut appliquer la règle des signes : • Si A et B sont de même signe alors $\frac{A}{B}$ et $A \times B$ sont positifs. • Si A et B sont de signes contraires alors $\frac{A}{B}$ et $A \times B$ sont négatifs <u>Mais vous ne pouvez pas appliquer la règle des signes dans les cas d'addition ou soustraction de A et B.</u>
G10		<u>Les équivalences suivantes sont toutes fausses :</u> $AB > 0 \Leftrightarrow A > 0 \text{ et } B > 0$ $AB > 0 \Leftrightarrow A > 0 \text{ ou } B > 0$ $\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow A > 0 \text{ et } B > 0$ $\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow A > 0 \text{ et } B < 0$ Est-il besoin de rappeler que le produit ou le quotient de 2 nombres strictement négatif est strictement positif ? <u>Remarque</u> : Un tableau de signes est souvent approprié lorsqu'on veut trouver le signe d'un produit ou d'un quotient de deux termes.

G11		<u>Définition et quelques relations avec les factorielles et les coefficients binomiaux</u> 1. $0! = 1, 1! = 1$ et $\forall n \geq 1, n! = n(n-1)!$ 2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$ 3. Si $0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\forall n \geq 2, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n; \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$ 4. <u>Triangle de Pascal :</u> Si $1 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
G12		Pour tous les réels a et b, pour tous les entiers n et m on a : $a^n \times b^n = (a \times b)^n; a^n \times a^m = a^{n+m}; (a^n)^m = a^{n \times m}; a^0 = 1$ si $b \neq 0, \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \frac{1}{b^n} = b^{-n}; \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$
G13		<u>Règles de calculs avec les racines carrées</u> $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ Mais attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
G14		$\sqrt{A^2} = A = \begin{cases} A & \text{si } A \geq 0 \\ -A & \text{si } A \leq 0 \end{cases}$
G 15		$\forall A > 0$ on a : 1. $x^2 < A \Leftrightarrow -\sqrt{A} < x < \sqrt{A}$ 2. $x < A \Leftrightarrow -A < x < A$ On en déduit : $x \geq A \Leftrightarrow x \leq -A$ ou $x \geq A$
G 16		Lorsqu'on écrit une relation, une expression utilisant des variables, on doit préciser l'ensemble dans lequel se situent les variables : « $\forall x \in \dots, \forall t \in \dots, \forall n \in \dots$ »

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis

DES ERREURS OU OUBLIS EN ALGEBRE LINEAIRE

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis
Alg1		N'oubliez pas de préciser dans quelle ligne vous effectuez vos opérations sur les lignes. Par exemple l'écriture $3L_1 + 5L_2$ n'a pas de sens ; par contre l'écriture $L_1 \leftarrow 3L_1 + 5L_2$ en a.
Alg2		Lorsque vous effectuez l'opération $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ sur la ligne L_i b peut être nul mais pas a car sinon vous perdez l'information détenue sur la ligne L_i. Par exemple l'opération $L_1 \leftarrow (\lambda - 1)L_1 + 3L_2$ n'est pas possible car $(\lambda - 1)$ pourrait être nul. Il faut alors inverser les lignes L_1 et L_2. L'opération $L_1 \leftarrow 3L_1 + (\lambda - 1)L_2$ est alors possible.
Alg3		Si vous effectuez des opérations sur les lignes d'une matrice A , la matrice obtenue n'est plus la matrice A .
Alg4		<u>N'utilisez pas le mot « dimension » pour évoquer les nombres de lignes et de colonnes d'une matrice. On ne parle de « dimension » que pour les espaces vectoriels.</u> L'affirmation « La matrice A a pour dimension 3 » n'a pas de sens. Parlez plutôt de la taille d'une matrice ou, si votre matrice est carrée (c'est pratiquement toujours le cas), d'ordre de la matrice. <u>Exemple</u> : si A est une matrice carrée qui a 3 lignes et 3 colonnes on peut dire que A est une matrice carrée d'ordre 3.
Alg5		La règle du « produit de facteurs » nul ne s'applique pas aux matrices. Autrement dit : vous pouvez avoir $AB = 0$ sans que les matrices A et B soient nulles. <u>Exemple</u> : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Alg6		L'implication « $AB = I \Rightarrow A$ et B sont inversibles » est fausse si vous ne précisez pas que les matrices sont carrées ou qu'elles commutent. <u>Exemple</u> : Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles et pourtant : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
Alg7		Ne confondez pas un polynôme P et $P(x) = 0$ qui est une équation.
Alg8		On ne parle pas de suites géométriques pour les matrices. Si vous avez une famille $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices qui vérifie la relation $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n <u>vous devrez montrer par récurrence que $U_n = A^n U_0$.</u>

Alg9		Si $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors A est inversible si et seulement si elle n'a aucun de ses coefficients diagonaux nul et, dans ce cas, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n \end{pmatrix}$
Alg10		<u>Matrices triangulaires inversibles</u> Une erreur trop souvent vue : « La matrice A est triangulaire donc elle est inversible » ou « La matrice A est diagonale donc elle est inversible ». Ces affirmations sont fausses. Il manque la condition « A n'a aucun coefficient diagonal nul ».
Alg11		L'implication $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ est vraie car <u>D est diagonale</u>. N'oubliez pas de le préciser. <u>Retenez bien</u> : Cette implication est fausse si votre matrice n'est pas diagonale.
Alg12		<u>La formule du binôme de Newton pour les matrices</u> <u>Elle ne s'applique qu'aux matrices qui commutent</u> ($AB = BA$) Elle s'écrit, pour tout n de $\mathbb{N}$: $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
Alg13		Rappelez-vous qu'une matrice qui a des colonnes liées n'est pas inversible.
Alg14		Si A, B et C sont trois matrices inversibles alors on a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{et} \quad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
Alg15		<u>Transposées de matrices</u> ➤ La fonction transposée est linéaire, ce qui signifie que, quelles que soient les matrices A et B et quels que soient les réels α et β, on a : ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^tA + \beta {}^tB$ ➤ De plus : ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ et ${}^t({}^tA) = A$
Alg16		N'oubliez pas que quelle que soit la famille F de vecteurs, $Vect(F)$ est un espace vectoriel. On dit que c'est l'espace vectoriel engendré par la famille F .
Alg17		Les affirmations « La famille F est génératrice », « La famille F est base » n'a aucun sens si vous ne précisez pas l'espace vectoriel engendré par F. On peut écrire : « La famille F est génératrice (ou est une base) de l'espace vectoriel E ».

Alg18		Si F est une famille de vecteurs et M une matrice, les notations « $M = F$ » et « $M = Vect(F)$ » n'ont aucun sens. (Une matrice n'est ni une famille de vecteurs, ni un espace vectoriel)
Alg19		Ne confondez pas $F = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ qui est une matrice et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ qui est un espace vectoriel.
Alg20		<u>Confusion entre un vecteur et le sous-espace propre engendré par ce vecteur.</u> Par exemple ne confondez pas le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre $E_1 = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ engendré par ce vecteur. Affirmer que « E_1 n'a qu'un vecteur » est absurde. Il y a une infinité de vecteurs dans E_1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de E_1 ; $Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas une base de E_1 <u>Autre erreur classique</u> : Considérons un endomorphisme f. Une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de f a pour colonnes les <u>coordonnées</u> des vecteurs propres dans la base canonique et non les sous espaces propres de f.
Alg21		Nous pouvons affirmer que deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre. Par contre cette affirmation est fausse à partir de 3 vecteurs. Par exemple considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (3, 4, 1)$. Ces trois vecteurs sont visiblement non colinéaires 2 à 2 car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles mais pourtant la famille (u, v, w) n'est pas libre car $w = u + 2v$.
Alg22		Dire que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre ne signifie pas que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ mais que « <u>si</u> $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ <u>alors</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ »
Alg23		Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un espace vectoriel E, ce n'est pas forcément une base de E. Vous pouvez prouver que c'est une base de E à l'aide de l'une des méthodes suivantes : • Si vous savez que $E = Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E (en plus d'être libre). C'est donc une base de E. • Si vous savez que $\dim E = n$ alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n. C'est donc une base de E.

Alg24		Si $E = Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E. Ce n'est pas forcément une base de E. Vous ne pouvez donc pas affirmer que $\dim E = n$. Vous devez d'abord prouver que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre pour que ce soit une base de E.
Alg25		<u>Confusion entre un vecteur et sa matrice de coordonnées dans une base donnée.</u> Un vecteur n'est égal à sa matrice de coordonnées que dans un espace vectoriel de matrices colonnes. ✓ Par exemple il ne faut pas confondre $x - 1$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice des coordonnées de $x - 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Si on pose $u = x - 1$ et si on appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Mat(u, \mathcal{B})$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ ✓ Ne confondez pas non plus $(1, 2, 3)$ qui est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui est sa matrice de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ici encore, si on pose $u = (1, 2, 3)$ et si on appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = Mat(u, \mathcal{B})$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ ✓ Autre exemple : considérons un endomorphisme f d'un espace vectoriel E et M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E. Si u est un vecteur de E de matrice de coordonnées U dans la base $\mathcal{B}$ alors $f(u)$ a pour matrice de coordonnées MU dans la base $\mathcal{B}$. <u>Attention :</u> N'écrivez donc pas $f(u) = MU$ car $f(u)$ est un vecteur et MU une matrice. Par contre on peut écrire : $Mat(f(u), \mathcal{B}) = MU$ ou $Mat_{\mathcal{B}}(f(u)) = MU$ Cela peut s'écrire encore : $Mat(f(u), \mathcal{B}) = Mat(f, \mathcal{B}) \times Mat(u, \mathcal{B})$ Ou $Mat_{\mathcal{B}}(f(u)) = Mat_{\mathcal{B}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(u)$
Alg26		<u>Comment démontrer une inclusion d'un espace vectoriel dans un autre ?</u> Considérons deux espaces vectoriels E et F de bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ pour E et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ pour F. Pour démontrer que $E \subset F$ il suffit de prouver que tous les vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ qui constituent une base de E appartiennent à F, c'est-à-dire qu'on peut écrire chaque vecteur de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Alg27		<u>Comment démontrer que deux espaces vectoriels sont égaux ?</u> Pour démontrer que 2 espaces vectoriels E et F sont égaux on peut utiliser deux méthodes : 1. On montre que $E \subset F$ et $F \subset E$ <i>ou bien</i> 2. On montre une seule inclusion ($E \subset F$ ou $F \subset E$) et $\dim E = \dim F$		
Alg28		<table><tr><td> F est un sous-espace vectoriel de E si : • $F \subset E$ • $F \neq \emptyset$ • $\forall (x, y) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$ </td><td> f est une application linéaire de E dans F si : $\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ </td></tr></table>	F est un sous-espace vectoriel de E si : • $F \subset E$ • $F \neq \emptyset$ • $\forall (x, y) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$	f est une application linéaire de E dans F si : $\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$
F est un sous-espace vectoriel de E si : • $F \subset E$ • $F \neq \emptyset$ • $\forall (x, y) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$	f est une application linéaire de E dans F si : $\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$			
Alg29		Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E il faut montrer que f est une application linéaire <u>mais aussi que l'ensemble d'arrivée est E</u> (on le prouvera en prenant un élément x quelconque de E et en montrant que $f(x)$ est également dans E).		
Alg30		<u>Comment déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée ?</u> Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel E et f un endomorphisme de E. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (que l'on peut noter $mat_{\mathcal{B}}(f)$ ou $mat(f, \mathcal{B})$) s'obtient en écrivant en colonnes les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il faut donc calculer $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ et exprimer les résultats en fonction des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$.		
Alg31		L'affirmation « A est la matrice de l'endomorphisme f » n'a aucun sens si vous ne précisez pas dans quelle base.		
Alg32		<u>Confusion entre un endomorphisme et sa matrice dans une base donnée</u> Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une base donnée, l'égalité $f = A$ n'a aucun sens. Une application n'est pas une matrice.		
Alg33		<u>Comment déterminer $Im(f)$?</u> Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, on obtient l'image de f en calculant les images de B par f : $Im(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ <u>Remarque :</u> Les coordonnées des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans la base B sont les colonnes de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (voir Alg30).		

Alg34		<u>Rang d'une matrice M</u> $rg(M) = \dim (Vect(C_1, C_2, \dots, C_n))$ où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les colonnes de M. <u>Remarque :</u> Si M est la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$, les colonnes de M sont les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans cette base $\mathcal{B}$. On a alors $rg(f) = rg(M)$
Alg35		Ne confondez pas le cardinal (<i>card</i>) d'un ensemble qui est le nombre d'éléments de cet ensemble et la dimension (<i>dim</i>) dont on ne parle que pour un espace vectoriel. Par exemple, si u, v et w sont trois vecteurs alors $card(u, v, w) = 3$ alors que $dim(u, v, w)$ n'a aucun sens. On ne parle donc pas de dimension d'une base. Si vous souhaitez parler de la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille (u, v, w) on peut utiliser le rang (rg) : $rg(u, v, w) = \dim (Vect((u, v, w)))$. « La dimension d'un endomorphisme » n'a pas de sens non plus. Par contre on peut parler du rang d'un endomorphisme : $rg(f) = \dim (Im(f))$.
Alg36		<u>Des équivalences à connaître :</u> Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Appelons M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors on a les équivalences : f est injective $\Leftrightarrow Ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow 0 \notin sp(f)$ $\Leftrightarrow f$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective $\Leftrightarrow M$ est inversible $\Leftrightarrow rg(M) = n$ $\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de E $\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est génératrice de E $\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de E $\Leftrightarrow rg(f) = n$ Rappelons que les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par les colonnes de M.
Alg37		<u>Théorème du rang</u> - Pour toute application linéaire f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F, on a ; $\dim(E) = rg(f) + \dim (Ker(f))$ Où $rg(f)$ est le rang de f c'est-à-dire $\dim (Im(f))$ - Si A est une matrice carrée d'ordre n, on a : $n = rg(A) + \dim (Ker(A))$

Alg38		<u>Coordonnées d'un vecteur et Matrice de passage</u> Exemple donné en dimension 3 mais que l'on peut aisément généraliser. ➤ Considérons deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ d'un espace vectoriel de dimension 3. (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) sont les coordonnées respectives de u, v et w signifie que : $\begin{cases} u = ae_1 + be_2 + ce_3 \\ v = de_1 + ee_2 + fe_3 \\ w = ge_1 + he_2 + ie_3 \end{cases}$ ➤ La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ s'obtient en écrivant en colonnes les coordonnées de u, v et w dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$: $P = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
Alg39		Il est inutile de montrer qu'une matrice de passage est inversible. Toutes les matrices de passage sont inversibles.
Alg40		L'affirmation « P est une matrice de passage » n'a aucun sens si vous ne précisez pas de quelle base à quelle base.
Alg41		Ne confondez pas la famille (U, V, W) formée de 3 vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et la matrice de passage P de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base (U, V, W) dont les coordonnées sont les colonnes de P.
Alg42		Nous savons que : « Une matrice triangulaire a ses valeurs propres qui sont ses coefficients diagonaux ». Cette propriété est également vraie si la matrice est diagonale car une matrice diagonale est une matrice triangulaire <u>mais elle est fausse pour les autres matrices.</u> On en déduit que la propriété : « Une matrice est inversible si et seulement si aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul » <u>n'est utilisable que pour les matrices triangulaires</u> (et donc aussi pour les matrices diagonales).
Alg43		Les vecteurs propres d'une matrice sont des vecteurs colonnes
Alg44		<u>Une propriété du cours importante à savoir :</u> Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes est une famille libre.
Alg45		L'ensemble des matrices colonnes X telles que $AX = 0$ est à la fois le noyau de A et son sous-espace propre associé à la valeur propre 0. <u>Autrement dit : $\text{Ker}(A) = E_0(A)$.</u>

Alg46		• Vous pouvez affirmer que « si $f(u) = 0$ alors $u \in \text{Ker}(f)$ ». Mais vous ne pouvez pas en déduire que $\text{Ker}f = \text{Vect}(u)$ (sauf si vous savez que $\dim(\text{Ker}f) = 1$). D'autres vecteurs sont peut-être nécessaires pour engendrer $\text{Ker}f$. • Vous pouvez affirmer que « si $AX = 0$ alors $X \in \text{Ker}(A)$ ». Mais vous ne pouvez pas en déduire que $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(X)$ (sauf si vous savez que $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$). D'autres vecteurs sont peut-être nécessaires pour engendrer $\text{Ker}(A)$. • <u>De même</u>, si vous prouvez que $AX = 2X$ avec $X \neq 0$, alors vous pouvez affirmer que X appartient à $E_2(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2. Mais vous ne pouvez pas affirmer que $E_2(A) = \text{Vect}(X)$ (sauf si on sait que $\dim E_2(A) = 1$). D'autres vecteurs sont peut-être nécessaires pour engendrer $E_2(A)$.
Alg47		<u>L'utilisation des polynômes annulateurs pour trouver des valeurs propres</u> Si P est un polynôme annulateur d'une matrice A alors les racines de P sont les seules <u>valeurs propres possibles de A</u>. Mais attention : toutes les racines de P ne sont pas forcément des valeurs propres de A. <u>Prenons un exemple :</u> Si $A^2 - 3A = 0$ alors $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et 3 (car 0 et 3 sont les racines de $X^2 - 3X$). Nous ne savons pas à ce stade si 0 et 3 sont des valeurs propres de A. Pour le savoir on peut utiliser une des méthodes suivantes : 1. Résoudre successivement les équations $AX = 0X$ et $AX = 3X$ pour rechercher les éventuels vecteurs propres associés à 0 et 3. Par exemple, si l'équation $AX = 3X$ conduit à une seule solution : $X = 0$ on dira que 3 n'est pas une valeur propre de A (un vecteur propre ne doit pas être nul). Dans le cas contraire, 3 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est trouvé en résolvant l'équation $AX = 3X$. 2. On regarde si les matrices $A - \lambda I$ obtenues en remplaçant successivement λ par 0 et par 3 sont inversibles. (On se rappelle que λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow A - \lambda I$ est non inversible) <u>Remarque :</u> Si on a trouvé les valeurs propres possibles de A il est inutile de chercher toutes les valeurs propres de A, c'est-à-dire de trouver toutes les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ est non inversible.
Alg48		<u>Confusion une matrice diagonalisable et une matrice inversible.</u> Si ces deux notions sont très différentes, retenons tout de même que pour savoir si A est diagonalisable on peut rechercher ses valeurs propres. On a alors l'équivalence : 0 est une valeur propre de $A \Leftrightarrow A$ n'est pas inversible. (et donc également : 0 n'est pas une valeur propre de $A \Leftrightarrow A$ est inversible).

Alg49		<u>Un vecteur propre est non nul.</u> Si vous avez prouvé qu'une matrice colonne U vérifie $AU = \lambda U$ vous devez préciser que $U \neq 0$ avant d'affirmer que U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Alg50		On lit trop souvent : « A est une matrice carrée d'ordre 3 et n'a que deux valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable ». Ceci est faux. Pour qu'une matrice A soit diagonalisable il faut trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$ Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A. Un même coefficient peut être répété plusieurs fois si le sous-espace propre associé à cette valeur propre est d'une dimension strictement supérieure à 1.
Alg51		<u>Formule de changement de bases</u> Soit E un espace vectoriel de dimension finie. • Soient B et B' deux bases de E. Soit f un endomorphisme de E. Soit A la matrice de f dans la base B. Soit T la matrice de f dans la base B'. Soit P la matrice de passage de B à B'. Alors on a : $A = PTP^{-1}$. • Réciproquement, Si on a la relation $A = PTP^{-1}$ (c'est-à-dire si A et T sont deux matrices semblables) alors A et T sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, P étant la matrice de passage d'une base à l'autre. <u>Remarque importante</u> : Dans le cas particulier où B' est une base de vecteurs propres, A est diagonalisable et alors la formule de changement de bases s'écrit : $A = PDP^{-1}$ avec D qui est une matrice diagonale.
Alg52		<u>Comment démontrer que deux matrices sont semblables ?</u> <u>Méthode 1</u> : On recherche une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$ <u>Méthode 2</u> : On montre que A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.
Alg53		<u>Une propriété très utile :</u> Des matrices semblables ont les mêmes valeurs propres

Alg54		<u>Rédaction d'une diagonalisation</u> <u>Autrement dit : comment trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :</u> <u>$A = PDP^{-1}$?</u> 1. Recherchez les valeurs propres puis les sous-espaces propres de A. 2. <u>Si la somme des dimensions de sous espaces propres est égale à l'ordre de la matrice</u>, on écrit : « La concaténation <u>des bases</u> des sous-espaces propres forme une famille de n vecteurs libres (car associés à des valeurs propres différentes) dans un espace de dimension n ($M_{n,1}(\mathbb{R})$) donc forme une base B de vecteurs propres de A . Si on appelle P la matrice de passage de la base canonique à la base B » (on l'obtient en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de B) « et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A » (écrits dans le même ordre que leurs vecteurs propres associés dans la matrice P) , « la formule de changement de bases nous donne la relation : $A = PDP^{-1}$ donc A est diagonalisable ». <u>Autre méthode :</u> On peut calculer séparément PD et AP. Si ces deux produits sont égaux, de l'égalité $AP = PD$ on déduit : $A = PDP^{-1}$ <u>Remarque :</u> Si la somme des dimensions de sous espaces propres n'est pas égale à l'ordre de la matrice, on ne pourra pas trouver les deux matrices P et D car A n'est pas diagonalisable.
Alg55		<u>De l'utilité de se vérifier</u> • Lorsque vous calculez l'inverse d'une matrice P vous pouvez vous vérifier en multipliant votre résultat par la matrice P . Vous devez obtenir la matrice I, évidemment ! • Lorsque vous avez trouvé une matrice X qui est vecteur propre d'une matrice A associé à la valeur propre λ , vous pouvez vous vérifier en calculant le produit AX . Vous devez obtenir λX. On peut également montrer que λ est une valeur propre de A en montrant que la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible (généralement on montre que les colonnes de $A - \lambda I$ sont liées.

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis

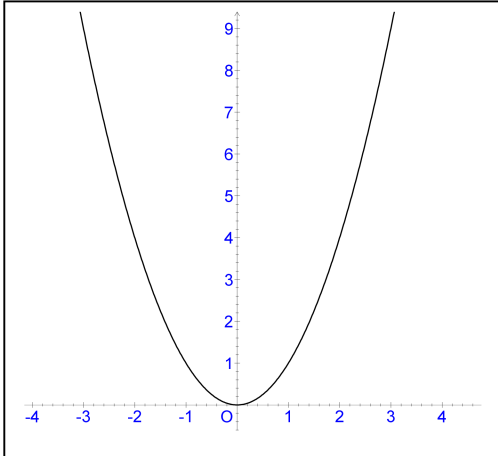
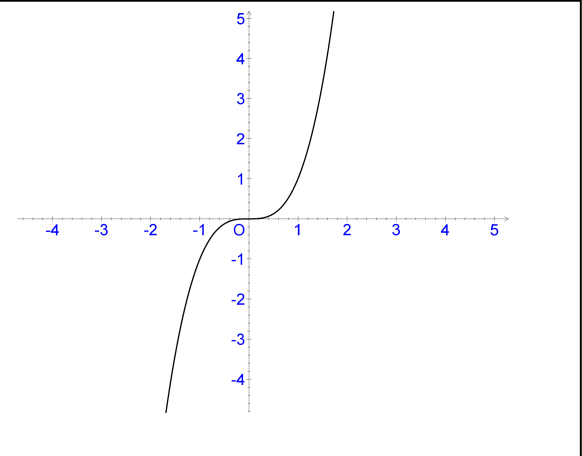
DES ERREURS OU OUBLIS EN ANALYSE

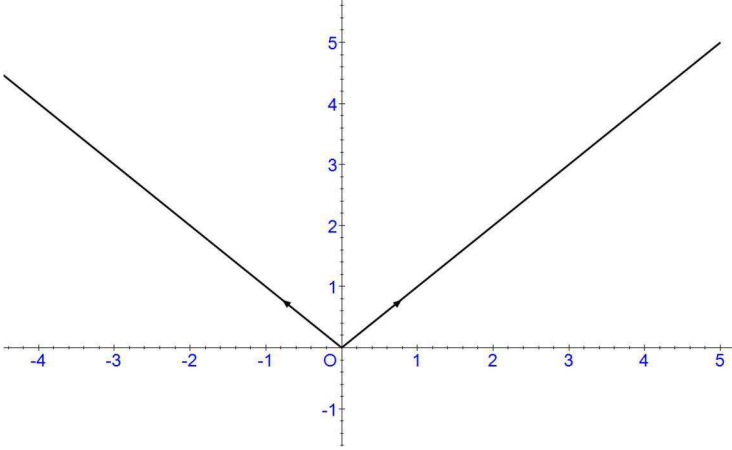
Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis
Ana1		Pour étudier le signe d'un polynôme du second degré, il faut calculer son discriminant. Il y a alors 3 possibilités : 1. Si $\Delta < 0$, le polynôme est toujours du signe de a (son coefficient d'ordre 2). 2. Si $\Delta = 0$, le polynôme est toujours du signe de a sauf en sa racine en laquelle il s'annule. 3. Si $\Delta > 0$, le polynôme s'annule en ses racines, est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire entre ses racines.
Ana2		Ne confondez pas la suite (u_n) qui se note entre parenthèses et le terme u_n de cette suite.
Ana3		Nous savons que toute suite décroissante et minorée (ou croissante et majorée) est convergente mais cette propriété ne nous donne pas la limite de la suite. Par exemple vous ne pouvez pas affirmer qu'une suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
Ana4		<u>Ne confondez pas le théorème de comparaison et le théorème d'encadrement !</u> <u>Théorème de comparaison :</u> • Si, à partir d'un certain rang on a : $u_n \leq v_n$ • Et si les suites (u_n) et (v_n) <u>convergent</u> respectivement vers l et l' Alors : <u>$l \leq l'$</u>. <u>Théorème d'encadrement :</u> • Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$ • Et si les suites (u_n) et (w_n) <u>convergent</u> vers le même réel l Alors <u>(v_n) converge vers l</u>. <u>Remarque :</u> nous avons des résultats analogues pour les fonctions ...
Ana5		Lorsque vous écrivez « $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ », n'oubliez pas de préciser « car $q < 1$ » (ou bien « car $-1 < q < 1$ »)
Ana6		<u>Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique</u> Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors • <u>Si $q \neq 1$</u>, <u>On retiendra :</u> $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{la raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{la raison}}$ $= \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q} \quad \text{ou} \quad \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} - \text{terme suivant}}{1 - \text{la raison}}$ • <u>Si $q = 1$</u>, la suite est constante donc $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1)u_0$

Ana7		<u>Terme général d'une suite géométrique</u> Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Ana8		<u>Terme général d'une suite arithmétique</u> Si (u_n) est une suite arithmétique de raison q alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr \quad \text{et} \quad u_n = u_1 + (n-1)r$
Ana9		Si (u_n) est une suite récurrente définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (u_n) et f n'ont pas forcément la même monotonie, ni la même limite.
Ana10		<u>Comment démontrer que tous les termes d'une suite sont définis ?</u> Si la suite est définie par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, alors il suffit de montrer (souvent par récurrence) que tous les termes de la suite sont dans l'ensemble de définition de f.
Ana11		<u>Les suites arithmético-géométriques :</u> Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b, \text{ avec } a \neq 1.$ Pour trouver le terme général de cette suite (c'est-à-dire l'expression de u_n en fonction de n) on procède de la manière suivante : 1. On recherche le point fixe l, solution de l'équation : $l = al + b$ 2. On montre que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - l (*)$ est géométrique de raison a. 3. On en déduit le terme général de la suite (v_n) puis celui de (u_n) grâce à la relation (*).
Ana12		<u>Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :</u> Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$ Pour trouver le terme général de cette suite (c'est-à-dire l'expression de u_n en fonction de n) on procède de la manière suivante : 1. On recherche les solutions de l'équation caractéristique : $r^2 - ar - b = 0$. 2. ➤ Si son équation caractéristique a deux racines r_1 et r_2 alors il existe deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha(r_1)^n + \beta(r_2)^n$ ➤ Si son équation caractéristique a une unique racine r_0 alors il existe deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)(r_0)^n$
Ana13		<u>Théorème du point fixe</u> Si (u_n) converge vers un réel l d'un intervalle I. et Si f est une fonction continue sur l'intervalle I. } Alors $f(u_n)$ converge vers $f(l)$. Si de plus, les termes de (u_n) vérifient la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ Alors $f(l) = l$.

Ana14		<u>Séries télescopiques</u> Pour toute suite (u_n) on a $\sum_{k=1}^{N-1} (u_{k+1} - u_k) = u_N - u_1$. Ainsi on a : La série « télescopique » $\sum_{k \geq 1} (u_{k+1} - u_k)$ converge $\Leftrightarrow$ La suite (u_N) converge
Ana15		L'inégalité $\sum_{n \geq 0} u_n \leq \sum_{n \geq 0} v_n$ n'a de sens que pour des séries convergentes. $(\infty \leq \infty)$ n'a aucun sens car ∞ n'est pas un réel). Vérifiez donc la convergence de vos séries avant d'écrire cette inégalité.
Ana16		Ne confondez pas $\sum_{k=1}^{+\infty}$ et $\sum_{k=1}^N$. <u>Par exemple</u> : $\sum_{k=0}^n q^k$ n'est pas une série géométrique. <u>Autre exemple</u> : vous pouvez écrire $\sum_{k=0}^N (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=0}^N u_k + \beta \sum_{k=0}^N v_k$ pour tout entier naturel N mais vous ne pouvez pas écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ sans avoir vérifié que les séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ convergent.
Ana17		Les séries géométriques $(\sum q^k)$, géométriques dérivées première $(\sum kq^{k-1})$ et seconde $(\sum k(k-1)q^{k-2})$ sont convergentes si et seulement si $q < 1$. On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.
Ana18		Les séries exponentielles $\sum \frac{x^n}{n!}$ sont convergentes pour tout réel x Et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
Ana19		Si la série $\sum u_n$ est convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ mais la réciproque est fausse : si u_n tend vers 0, on peut avoir $\sum u_n$ qui diverge. <u>Exemple</u> : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors que son terme général tend pourtant vers 0.

Ana20		Lorsque vous écrivez les critères d'équivalence, de négligeabilité ou de comparaison avec des séries vous devez vérifier que les termes généraux sont positifs (au moins à partir d'un certain rang).
Ana21		$x, f(x), e^x$ ne sont pas des fonctions mais des réels. Ecrivez plutôt : $x \mapsto x$, $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto e^x$. Vous ne pouvez donc pas écrire « $f(x)$ est continue, dérivable ou croissante sur ... » mais « f est continue, dérivable ou croissante sur ... ». De même si u est une fonction vous ne pouvez pas écrire $u = x \ln x + 6$ mais $u(x) = x \ln x + 6$.
Ana22		Ne confondez pas le vocabulaire lié à une fonction et celui lié à sa représentation graphique. Par exemples vous ne devez pas écrire « C_f est croissante » mais « f est croissante » ; vous ne devez pas écrire « f coupe l'axe des abscisses au point A » mais « C_f coupe l'axe des abscisses au point A ».
Ana23		Si vous souhaitez appliquer une fonction aux deux membres d'une inégalité vous <u>devez connaître et préciser la monotonie de la fonction</u> : Prenons a et b deux réels tels que $a \leq b$ alors : • $f(a) \leq f(b)$ si f est croissante • $f(a) \geq f(b)$ si f est décroissante <u>Remarque</u> : L'équivalence $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ ne peut être écrite que si f est <u>croissante et bijective</u>. Et vous devez le préciser !!! (Bien entendu, $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ ne peut être écrite que si f est <u>décroissante et bijective</u>.)
Ana24		Si vous appliquez une fonction f aux deux membres de l'inégalité $a < b$, vous n'obtiendrez une inégalité stricte ($f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$) que si f est <u>strictement monotone</u> (strictement croissante pour $f(a) < f(b)$ et strictement décroissante pour $f(a) > f(b)$)
Ana25		On ne peut parler de fonction constante que sur un intervalle. <u>Exemple</u> : Si on a $f(0) = 3$, f n'est pas constante en 0. f prend juste la valeur 3 en 0.
Ana26		Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômiales. Elle ne doit pas s'écrire à l'aide d'autres fonctions ($\exp, \ln, \sqrt{\quad} \dots$). Elle est de classe C^∞ sur son ensemble de définition c'est-à-dire sur tout intervalle qui ne comporte pas de valeurs interdites.
Ana27		La fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ mais uniquement sur $\mathbb{R}_+$. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Ana28		La fonction $\ln$ n'est définie que sur $]0; +\infty[$. Elle est de classe C^∞ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Ana29		La fonction racine carrée est définie, continue sur $[0; +\infty[$ mais n'est dérivable, de classe C^n ou même de classe C^∞ que sur $]0; +\infty[$.
Ana30		L'affirmation « La fonction inverse est décroissante » est fausse si vous ne précisez pas sur quel ensemble elle est décroissante. On peut proposer le contre-exemple : $-3 < 2$ et pourtant $-\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ (on aurait dû avoir une inversion de l'ordre si la fonction inverse avait été décroissante sur $\mathbb{R}$). <u>La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.</u> Le problème qu'on rencontre dans le contre-exemple est que -3 et 2 sont l'un dans $] -\infty ; 0[$ et l'autre dans $]0; +\infty[$. On ne peut donc pas appliquer la décroissance de la fonction inverse.
Ana31		<u>Monotonies des fonctions puissances</u> <u>Si n est impair :</u> $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}$. <u>Si n est pair :</u> $x \mapsto x^n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. <u>Pour vous en souvenir, pensez aux fonctions carré et cube :</u>  $x \mapsto x^2$  $x \mapsto x^3$
Ana32		L'affirmation « $\ln t$ est toujours positif sur $]0; +\infty[$ » est fausse. La fonction $\ln$ est négative sur $]0; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.

Ana33		Ne confondez pas $\mathbb{R}_+$ et $]0; +\infty[$. <u>Par exemples :</u> • La fonction $\ln$ est définie et de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ et non sur $\mathbb{R}_+$. La fonction racine carrée est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est dérivable (et a fortiori de classe C^n avec $n \geq 1$) que sur $]0; +\infty[$.
Ana34		<u>La fonction valeur absolue</u> $ x = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle est dérivable (et même de classe C^∞) sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Par contre elle est bien continue sur $\mathbb{R}$ comme on peut le voir sur sa représentation graphique : 
Ana35		Ne confondez pas un produit et une composée de fonctions. Par exemple la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ est un produit des fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \ln x$. Si on compose ces deux fonctions on obtient les fonctions : $u \circ v : x \mapsto \sqrt{\ln x} \text{ et } v \circ u : x \mapsto \ln(\sqrt{x}).$
Ana36		<u>Comment étudier la parité d'une fonction f</u> 1. Montrez que l'ensemble de définition D_f de f est centré en 0, autrement dit que : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$. 2. Pour tout x de D_f, on calcule $f(-x)$. 3 cas se présentent : i. Si $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$ alors f est paire. ii. Si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire. iii. Sinon f n'est ni paire, ni impaire. <u>Remarque :</u> Une fonction qui n'est pas paire n'est pas forcément impaire.

Ana37		<u>Quelques règles de calculs avec la fonction logarithme :</u> Quels que soient les réels a et b strictement positifs et l'entier relatif p, on a : 1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ 2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ 3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ 4. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ 5. $\ln(a^p) = p\ln(a)$ 6. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
Ana38		<u>Quelques règles de calculs avec la fonction exponentielle :</u> Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif. Alors : 1. $e^a \times e^b = e^{a+b}$ 2. $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$ 3. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ 4. $(e^a)^n = e^{a \times n}$ 5. $\sqrt{e^a} = (e^a)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}a} = e^{\frac{a}{2}}$ Ne confondez pas $e^{1/x}$ et $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$
Ana39		<u>Des limites en 0 à connaître :</u> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
Ana40		Les formes indéterminées les plus fréquentes (donc à connaître) sont : $0 \times \infty, \infty - \infty, \frac{0}{0} \text{ et } \frac{\infty}{\infty}.$ Vous pourrez rencontrer également les formes 1^∞ et 0^0.
Ana41		Un majorant, un minorant, un minimum ou un maximum d'une suite ou d'une fonction est un réel « fixe » c'est-à-dire qui ne dépend d'aucune variable. <u>Par exemple :</u> Si on prouve que $u_n < 2n + 1$, on ne peut pas dire que $2n + 1$ est un majorant de u_n car il dépend de n.
Ana42		L'affirmation « La fonction f a une unique solution » n'a pas de sens car f n'est pas une équation. Par contre on peut écrire « L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution ».

Ana43		N'utilisez pas « les « croissances comparées» » n'importe comment. Les limites utilisant les croissances comparées des fonctions polynomiales, $\ln$ et $\exp$ ne s'utilisent que dans des cas particuliers. On pourra remarquer que ces limites ne sont données : • qu'aux bornes des ensembles de définition des fonctions $\ln$ et $\exp$. • que dans des cas de <u>produits ou quotients</u> des fonctions $\ln$ ou $\exp$ avec la fonction $x \mapsto x^\alpha$ <u>qui conduisent à des formes indéterminées</u>. Sous la dénomination « croissances comparées » on pourra donner les 4 limites suivantes : $\forall \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\text{qui s'écrit aussi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0)$ Pour tout entier naturel n, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.
Ana44		Il y a une redondance dans l'affirmation : « f est continue sur $]0 ; +\infty[$, $\forall x \in]0 ; +\infty[$ » Ecrivez simplement : « f est continue sur $]0 ; +\infty[$ »
Ana45		Avant de dériver une fonction vous devez rechercher l'ensemble de dérivabilité.
Ana46		<u>Comment prouver que f est continue en un réel a ?</u> Vous devez prouver que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (en calculant éventuellement les deux limites de f à droite et à gauche de a si l'expression de f est différente). <u>Comment prouver que f est continue sur un intervalle ?</u> Voir tableau Ana 102
Ana47		<u>Comment prouver que f est dérivable en un réel a ?</u> Vous devez prouver que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie (en vérifiant éventuellement que les deux limites à droite et à gauche de a sont égales si l'expression de f est différente). Si c'est le cas la limite obtenue est $f'(a)$. <u>Comment prouver que f est dérivable sur un intervalle ?</u> Voir tableau Ana 102
Ana48		<u>Lien entre dérivabilité et continuité</u> Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I. <u>La réciproque est fausse.</u> (Voir les fonctions racine carrée et valeur absolue qui sont continue en 0 mais pas dérivables en 0)

Ana49		Une erreur souvent rencontrée dans les devoirs : « la composée de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est dérivable sur I » Cette affirmation est exacte si l'intervalle I est $\mathbb{R}$ mais elle est fausse dans le cas général. Par exemple les fonctions $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \ln x$ sont <i>dérivables</i> sur $]0 ; +\infty[$ et pourtant la fonction $x \mapsto \ln(x - 1)$ n'est pas <i>dérivable</i> sur $]0 ; +\infty[$ (elle l'est seulement sur $]1 ; +\infty[$). <u>Remarque :</u> On peut remplacer « <i>dérivable</i> » par « <i>continue</i> » ou de « <i>classe C^n</i> » ou même de « <i>classe C^∞</i> ». Pour trouver les intervalles sur lesquels les fonctions e^u, $\ln(u)$, $\sqrt{u}$, $u^n \dots$ sont continues, dérivables, de classe C^∞, on utilise le tableau qui est en Ana102.
Ana 50		Une erreur très fréquente : « Si f et g sont dérivables sur un intervalle I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I ». Il manque la condition : « g ne s'annule jamais sur l'intervalle I ». <u>Remarque :</u> On peut remplacer "<i>dérivable</i>" par "<i>continue</i>" ou « <i>de classe C^1</i> », « <i>de classe C^2</i> », ..., « <i>de classe C^n</i> », ..., « <i>de classe C^∞</i> ».
Ana 51		<u>Dérivabilité de $\ln(u)$</u> Pour montrer qu'une fonction de la forme $\ln(u)$ est dérivable sur un intervalle I, il faut montrer : 1. u est dérivable sur I 2. $u > 0$ sur I.
Ana52		f est de classe C^1 sur un intervalle I signifie : 1. f est dérivable sur I 2. f' est continue sur I <u>Attention :</u> • Ce n'est pas f mais f' qui doit être continue sur I. • Si f est de classe C^1 sur I alors f est dérivable sur I mais la réciproque est fausse.
Ana53		Dire que « f est continue, dérivable, de classe C^∞, croissante ... » n'a pas de sens si vous ne précisez pas sur quel intervalle.
Ana54		Si f est une fonction dérivable en un point a (on dit « en un point » mais a est un réel évidemment !) alors sa courbe représentative admet une tangente qui a pour équation : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

Ana55		<u>Développement limité et équation de tangente</u> Si f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ alors la courbe représentative de f : • admet une tangente d'équation $y = a_0 + a_1x$ au point d'abscisse 0. • est au dessus de cette tangente si $a_2 > 0$ et au-dessous si $a_2 < 0$.
Ana56		<u>Rappel sur la dérivation d'une composée de fonctions</u> Exemple : Si $f(x) = g(2x)$ alors $f'(x) = \underline{2} g'(2x)$ Ce résultat provient de la formule plus générale : Si $f(x) = g(u(x))$ alors $f'(x) = \underline{u'(x)}g'(u(x))$
Ana57		Ne confondez pas f^n et $f^{(n)}$. $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \text{ et } f^{(n)} \text{ est la dérivée } n\text{-ième de } f.$
Ana58		Ne confondez pas « le signe de la fonction f <u>dépend</u> de celui de u » et « le signe de la fonction f <u>est le même que</u> celui de u ». <u>Par exemple</u> : si $f(x) = -u(x)$, le signe de f dépend du signe de u (si u est négative, f est positive et réciproquement) mais n'est pas du signe de u <u>Autre exemple</u> : si $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$, dire que « le signe de f' <u>dépend</u> de celui de u » n'est pas précis. Ici vous affirmerez que « le signe de f' est le même que celui de u ».
Ana59		Des équivalents au voisinage de 0 que vous devez connaître : 1. $e^x - 1 \sim x$ 2. $\ln(1+x) \sim x$ 3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
Ana60		Nous savons que : « Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors si f ou g a une limite finie ou infinie on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ » mais la réciproque est fausse comme le montre cet exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } e^x \not\sim x$
Ana61		Les seules opérations autorisées avec les équivalents sont les multiplications, les divisions et les puissances. Additions, soustractions et compositions (en dehors des fonctions puissances) sont interdites dans le cas général.

Ana62		Les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 que vous devez connaître : 1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ 3. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ 4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 5. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ 6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
Ana63		<u>Une méthode classique :</u> Pour montrer que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle I on étudie les variations de la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - g(x)$. On montre alors que son maximum est négatif ou nul.
Ana64		<u>Théorème de la bijection</u> Pour montrer que l'équation $f(x) = k$ a une unique solution on utilise le théorème de la bijection en montrant que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré mais cela ne suffit pas ! <u>Vous devez aussi vérifier que k est dans l'ensemble d'arrivée de f.</u> Par exemple l'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution bien que la fonction exponentielle soit continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car l'ensemble d'arrivée de la fonction exponentielle ne contient pas 0. (Son ensemble d'arrivée est $]0; +\infty[$). <u>Remarque 1:</u> C'est le théorème de bijection qu'on utilise ici ! (N'écrivez pas « le corollaire des valeurs intermédiaires ». C'est imprécis. On peut trouver d'autres corollaires au théorème des valeurs intermédiaires.) <u>Remarque 2:</u> N'écrivez pas « f admet une bijection » mais « f réalise une bijection » <u>Remarque 3:</u> k doit être un réel indépendant de x. Par exemple, si $f(x) = x + 1$, l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution alors même que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Ana65		Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I qui réalise une bijection de I vers un intervalle J. Soit g sa fonction réciproque. Alors : 1. Pour tous les réels x et y de I on a : $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. 2. Si f' ne s'annule jamais sur I alors g est dérivable sur J.

Ana66		Ne confondez pas f^{-1} et $\frac{1}{f}$. <u>Par exemple</u> : si $f(x) = e^x$ alors $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ et $f^{-1}(x) = \ln(x)$
Ana67		Nous savons que si f est une fonction bijective sur un intervalle I elle admet une fonction réciproque f^{-1} qui est définie sur $f(I)$. f et f^{-1} ont alors les mêmes variations <u>sur leurs ensembles de définition respectifs</u> : I pour la fonction f et $f(I)$ pour f^{-1}. Pour être plus complet : nous pouvons retenir qu'on peut obtenir le tableau de variations de f^{-1} en intervertissant les ensembles de départ et d'arrivée du tableau de variations de f.
Ana68		<u>Convexité et concavité</u> f est convexe sur un intervalle $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur I $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I f est concave sur un intervalle $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur I $\Leftrightarrow f'' \leq 0$ sur I
Ana69		<u>Points d'inflexion :</u> C_f admet un point d'inflexion au point $(a, f(a))$ ssi f'' s'annule et change de signe en a.
Ana70		<u>L'inégalité des accroissements finis (sans valeurs absolues)</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ alors : $\forall (a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$, $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ <u>L'inégalité des accroissements finis (avec valeurs absolues)</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall x \in I, f'(x) \leq k$ alors pour tous les réels a et b de I, on a : $f(b) - f(a) \leq k b - a$
Ana71		Si f et g sont deux fonctions qui admettent F et G comme primitives sur un intervalle I alors : FG <u>n'est pas une primitive</u> de fg sur I. $\frac{F}{G}$ <u>n'est pas une primitive</u> de $\frac{f}{g}$ sur I.
Ana72		La fonction $t \mapsto t \ln t - t$ est une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$

Ana73		$\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u $ Dans le cas général, $\frac{1}{u}$ n'a pas pour primitive $\ln u$.
Ana74		Soit n un entier différent de -1 . $u'u^n$ a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ Donc, dans le cas général, u^n n'a pas pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$
Ana75		Nous savons que $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ mais dans le cas général on ne connaît pas de primitive de e^u (ce n'est pas $\frac{1}{u'} e^u$).
Ana76		Lorsque vous intégrez une fonction sur un intervalle $[a ; b]$ vous devez au préalable prouver que cette fonction est continue sur $[a ; b]$.
Ana77		Lorsque vous souhaitez démontrer une inégalité avec des intégrales il faut en premier lieu penser à trouver une inégalité impliquant la fonction qui est sous l'intégrale. Ensuite il faut intégrer en respectant l'ordre croissant des bornes. Deux méthodes à connaître pour obtenir l'inégalité de la fonction : 1. On écrit la variable (x ou t) entre les bornes a et b de l'intégrale puis on reconstruit la fonction ou on utilise la monotonie de la fonction. 2. Si la fonction qui est sous l'intégrale est un produit de deux fonctions u et v on obtiendra l'inégalité désirée en commençant par en trouver une avec u ou v puis en multipliant par l'autre fonction (u ou v). Qui de u ou de v doit-on encadrer ? Il n'y a pas de règle. Essayez avec l'une et si vous n'obtenez pas le bon encadrement, essayez avec l'autre. Remarque : Ces méthodes peuvent être utilisées pour trouver le signe d'une intégrale.
Ana78		<u>Croissance des intégrales</u> Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I telles que : $\forall t \in I, f(t) \leq g(t)$ Alors pour tous a et b de I, l'inégalité $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ n'est vraie que si on intègre dans l'ordre croissant des bornes (i.e. $a \leq b$). Remarques : 1. Ne parlez pas de « l'ordre croissant des bornes » lorsque vous avez une égalité : $f(t) = g(t)$. 2. Il n'y a pas d'équivalence mais une simple implication lorsque vous passez de $f(t) \leq g(t)$ à $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Ana79		<u>Comment démontrer qu'une fonction définie par une intégrale est de classe C^1 ?</u> Considérons la fonction $G : x \mapsto \int_0^{2x} f(t) dt$. 1. On montre tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 2x]$ si x est positif (et $[2x ; 0]$ si x est négatif). Cela justifie l'existence de G sur $\mathbb{R}$. 2. On en déduit que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a donc $F' = f$ donc, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. 3. On en déduit que $G(x) = F(2x) - F(0)$. Les fonctions $x \mapsto 2x$ et F étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(2x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 2F'(2x) = 2f(2x)$. <u>Remarques :</u> 1. La même méthode s'adapte à toutes les fonctions définies par une intégrale dont les bornes sont autres que 0 et $2x$ et à tout intervalle autre que $\mathbb{R}$. 2. $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) \neq 2f(2x) - 2f(0)$.
Ana80		1. Si on veut intégrer par parties $\int_a^b u(t) v'(t) dt$ il faut vérifier que les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a ; b]$. On a alors la relation : $\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$ 2. Si on veut intégrer $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide d'un changement de variables $x = u(t)$, il faut vérifier que u est de classe C^1 et strictement monotone sur $[a ; b]$.
Ana81		Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie. Ce n'est pas une intégrale impropre. Inutile donc d'étudier sa convergence.
Ana82		On ne peut pas faire d'intégrations par parties ou de changements de variables sur des intégrales impropres. Il faut calculer l'intégrale en remplaçant la borne impropre par un réel A puis, après avoir effectué l'IPP ou le changement de variable, faire tendre A vers la borne impropre.
Ana83		Pour tous a et b de $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est à dire $\mathbb{R}$ ou $-\infty$ ou $+\infty$) l'inégalité $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ n'a de sens que pour des intégrales convergentes. ($\infty \leq \infty$ n'a aucun sens car ∞ n'est pas un réel) Vérifiez donc la convergence de vos intégrales avant d'écrire cette inégalité.

Ana84		Ne confondez pas la linéarité des intégrales et la relation de Chasles : Prenons deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, trois réels a, b et c de I et deux autres réels quelconques α et β. On a alors : La relation de Chasles : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ La linéarité des intégrales : $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$ Remarque: Ces relations peuvent être utilisées avec des <u>intégrales impropres convergentes</u>. Vérifiez donc la convergence de vos intégrales avant d'écrire ces égalités. Par exemple, Vous ne pouvez pas écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx$ sans avoir montré préalablement que les intégrales $\int_{-\infty}^A f(x) dx$ et $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ convergent.
Ana85		Ne confondez pas $\int_0^A f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$. Vous ne pouvez pas écrire $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$ pour $A > 0$
Ana86		<u>Intégrales de Riemann</u> Pour tout $A > 0$, l'intégrale de Riemann $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. <u>Attention :</u> $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ n'est pas une intégrale de Riemann.
Ana87		Nous savons que si deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont leurs termes généraux équivalents ($u_n \sim v_n$) alors elles sont de même nature. <u>Attention :</u> Cela ne signifie pas que $\sum u_n \sim \sum v_n$ ni que $\sum u_n = \sum v_n$.
Ana88		Considérons deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ impropres en a de $\overline{\mathbb{R}}$ (a est un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$). Nous savons que, sous certaines conditions, si $f \sim g$ au voisinage de a alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature. <u>Attention :</u> Cela ne signifie pas que $\int_a^b f(t) dt \sim \int_a^b g(t) dt$ ni que $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$.

Ana89		Considérons deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ impropres en a de $\overline{\mathbb{R}}$ (a est un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$). <u>L'implication</u> si $f = o(g)$ alors $\int_a^b f(t) dt = o\left(\int_a^b g(t) dt\right)$ <u>est fausse</u>.
Ana90		Lorsque vous écrivez les critères d'équivalence, de négligeabilité ou de comparaison avec des intégrales vous devez vérifier que les fonctions qui sont sous les intégrales sont continues et positives.
Ana91		- Les fonctions de deux variables peuvent s'écrire sous la forme : $(x, y) \mapsto \dots$ mais pas sous la forme $x \mapsto \dots$ ou $y \mapsto \dots$ - Les fonctions de deux variables ne peuvent pas être continues, de classe C^1 ou C^2 sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$ mais sur un domaine de la forme $I \times J$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.
Ana92		Soit f une fonction de deux variables. Pour pouvoir démontrer qu'on ne trouvera d'extrémums de f qu'en ses points critiques il faut vérifier que <u>f est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$</u>.
Ana93		<u>Principe de superposition des solutions particulières d'une équation différentielle</u> Si f est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = u(t)$ et g une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = v(t)$ alors $f + g$ est une solution particulière de l'équation différentielle : $y' + ay = u(t) + v(t)$ Ce principe s'applique également aux équations différentielles du second ordre.
Ana94		<u>Equations différentielles linéaires du premier ordre</u> Elles ont de la forme : $y' + ay = b(t)$ où $a \in \mathbb{R}$ et b est une fonction. L'ensemble des solutions est la somme d'une solution particulière dont la forme est généralement donnée dans l'énoncé et des solutions de l'équation homogène associée ($y' + ay = 0$) qui sont les fonctions de la forme $t \mapsto ke^{-at}$, k étant un réel quelconque. <u>Autrement dit</u> : Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b(t)$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto ke^{-at} + s(t)$ où k est un réel quelconque et s est n'importe quelle fonction solution de (E).

Ana95		<u>Equations différentielles linéaires du second ordre</u> Elles ont de la forme : $ay'' + by' + cy = d(t)$ où a et b sont deux réels et c une fonction. • L'équation homogène associée : $ay'' + by' + cy = 0$ a pour équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. ➤ Si l'équation caractéristique a deux solutions x_1 et x_2 alors l'équation homogène a pour solutions toutes les fonctions de la forme $t \mapsto k_1 e^{x_1 t} + k_2 e^{x_2 t}$ où k_1 et k_2 sont 2 réels quelconques. ➤ Si l'équation caractéristique a une unique solution x_0 alors l'équation homogène a pour solutions toutes les fonctions de la forme $t \mapsto (k_1 t + k_2) e^{x_0 t}$ où k_1 et k_2 sont 2 réels quelconques. ➤ Si l'équation caractéristique n'a pas de solution : ce cas n'est pas au programme. L'ensemble des solutions de : $ay'' + by' + cy = d(t)$ est la somme d'une solution particulière dont la forme est généralement donnée dans l'énoncé et des solutions de l'équation homogène associée
Ana96		<u>Comment rechercher des extrémums d'une fonction f de deux variables sur un domaine D ?</u> 1. On montre que f est de classe C^2 sur le domaine D. 2. On calcule les dérivées partielles à l'ordre 1 : $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$. 3. On recherche les points critiques en résolvant le système : $\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases}$ 4. On calcule les 4 dérivées partielles à l'ordre 2 : $\partial_{1,1}^2(f)$, $\partial_{1,2}^2(f)$, $\partial_{2,1}^2(f)$ et $\partial_{2,2}^2(f)$ 5. Pour chaque point critique $(x_0; y_0)$ on constitue la matrice hessienne de f en $(x_0; y_0)$: $\nabla^2(f)(x_0; y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x_0; y_0) & \partial_{1,2}^2(f)(x_0; y_0) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x_0; y_0) & \partial_{2,2}^2(f)(x_0; y_0) \end{pmatrix}$ 6. On détermine les valeurs propres de chaque matrice hessienne trouvée à la question précédente. • Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0; y_0)$ sont strictement positives alors f admet un minimum local en $(x_0; y_0)$. • Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0; y_0)$ sont strictement négatives alors f admet un maximum local en $(x_0; y_0)$.. • Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0; y_0)$ sont non nulles et de signes opposés alors f n'admet pas un extrémum local en $(x_0; y_0)$. . Le point $(x_0; y_0)$. est alors un point col (ou point selle). • Si une valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0; y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure de la matrice hessienne.

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis

Ana101		<u>Ecrivez ici les erreurs ou oublis concernant les calculs de dérivées</u>
--------	--	---

Ana102		<u>Ensembles de dérivabilités et dérivées</u>		
		Fonctions	Fonctions dérivées	Ensemble de dérivabilité I
		u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu^{n-1} \times u'$	$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ (de plus : u \neq 0 \text{ si } n < 0) \end{array} \right.$
		$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$	$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ u > 0 \text{ sur } I \end{array} \right.$
		$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ u > 0 \text{ sur } I \end{array} \right.$
		e^u	$u' e^u$	$u \text{ est dérivable sur } I$
		$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ v \text{ est dérivable sur } I \\ v \neq 0 \text{ sur } I \end{array} \right.$
		uv	$u'v + uv'$	$u \text{ et } v \text{ sont dérivables sur } I$

Remarque : Ce sont les mêmes règles qu'on utilise pour déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions $u^n, \ln(u)$... sont continues, de classe C^1 , de classe C^2 , ..., de classe C^∞ : il suffit de remplacer dans la colonne de droite « dérivable » par « continue » ou « de classe C^1 » ou « de classe C^2 » ou ... « de classe C^∞ ».

Une exception : La fonction $\sqrt{u}$ est continue sur tout intervalle I sur lequel $u \geq 0$.

Ana103		<u>Ecrivez ici les erreurs ou oublis concernant les calculs de primitives</u>
Ana104		<u>Ecrivez ici les erreurs faites lors de calculs de limites</u>

DES ERREURS OU OUBLIS AVEC LES PROBABILITES

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis
Pr1		<u>Ne confondez pas un événement et sa probabilité.</u> En particulier vous pouvez définir des unions ou intersections d'événements mais pas de probabilités. Vous pouvez faire des calculs avec des probabilités (qui sont des nombres) mais pas avec des événements. <u>Quelques exemples d'erreurs :</u> considérons 4 événements : A, B, C et D. Les écritures suivantes n'ont aucun sens : $p(A) = p(B) \cup p(C)$ $p(A) = p(X = 1 \cap p)$ $p(A) = B \cap C \times D$ $(X = 0) \times (Y = 0)$ <u>Une autre erreur classique :</u> Lorsque vous décrivez une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique, le succès ne s'appelle pas p. Le succès est un événement. C'est sa probabilité qui est égale à p.
Pr 2		Ne confondez pas une variable aléatoire X (qui est une application) et $(X = k)$ qui est un événement. <u>Par exemples :</u> - Si X et Y sont des variables aléatoires, $(X = 1) \cap (Y = 2)$ a un sens mais $X \cap Y$ n'en n'a pas. - De même $p(X = 1)$ a un sens mais $p(X)$ n'en n'a pas.
Pr 3		<u>Système complet d'événements</u> On dit qu'une famille d'événements non vides est un système complet d'événements si ces événements sont disjoints 2 à 2 et que leur réunion est l'univers. <u>Cas particulier à connaître :</u> Si X est une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où I est une partie finie ou non de $\mathbb{N}$. Alors la famille $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements appelé <u>système complet d'événements associé à X</u>. <u>Remarque :</u> Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, $\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$.
Pr 4		<u>Incompatibilités d'événements</u> - Deux événements A et B sont dits incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$ <u>Autrement dit :</u> A et B sont incompatibles ssi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ - Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sont n événements 2 à 2 incompatibles alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Pr 5		<u>Indépendances d'événements</u> - On dit que <u>deux événements</u> A et B sont <u>indépendants</u> si $P(A \cap B) = P(A)P(B).$ Autrement dit, A et B sont indépendants si la probabilité de l'un n'est pas influencée par la réalisation de l'autre. - Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est mutuellement indépendante si pour toute partie J de I on a : $P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$ <u>Indépendances de variables aléatoires</u> Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y).$ <u>On peut généraliser :</u> n variables aléatoires $X_1, X_2 \dots X_n$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si quelles que soient les valeurs $x_1 \in X_1(\Omega)$, $x_2 \in X_2(\Omega)$, ..., $x_n \in X_n(\Omega)$, on a : $P\left(\bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} P(X_i = x_i)$
Pr 6		<u>Lemme des coalitions</u> Si $X_1, X_2 \dots X_n$ sont n v.a.r. mutuellement indépendantes alors toute variable aléatoire fonction de p d'entre elles est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $(n - p)$ autres.
Pr 7		<u>La formule des probabilités totales</u> Si $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors pour tout événement A on a : $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \dots + P(B_n \cap A)$ $= P(B_1) \times P_{B_1}(A) + P(B_2) \times P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \times P_{B_n}(A)$ <u>Attention :</u> $P(A) \neq P_{B_1}(A) + P_{B_2}(A) + \dots + P_{B_n}(A)$
Pr 8		<u>La formule des probabilités composées</u> Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et n un entier tel que $n \geq 2$. Alors, pour toute famille d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0,$ on a : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

Pr 9		<u>La formule du crible ou de Poincaré</u> Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et n un entier avec $n \geq 2$. Alors, pour toute famille d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ <u>Exemples :</u> Si A, B et C sont trois événements, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
Pr 10		<u>Comment calculer une espérance et une variance d'une variable aléatoire discrète ?</u> ➤ Si X est <u>une variable aléatoire discrète finie</u> qui prend les valeurs : $x_1, x_2, \dots, x_n$ alors X admet : • Une espérance mathématique : $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$ $= \sum_{k=1}^n x_k \times P(X = x_k)$ • Une variance que l'on obtient grâce à la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2$ ➤ Si X <u>une variable aléatoire discrète infinie</u> telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors : • Si la série $\sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente, X admet une espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i \times P(X = x_i)$. • Si X admet un moment d'ordre 2 c'est-à-dire si la série $\sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)$ est absolument convergente, X admet une variance que l'on obtient grâce à la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2$ <u>Attention :</u> $V(X) \neq \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)$ dans le cas général. Il ne faut pas confondre $V(X)$ et $E(X^2)$!!! <u>Remarque :</u> On en peut pas écrire $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \times P(X = x_k)$ ou $E(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)$ avant d'avoir prouvé la convergence de ces séries.

Pr 11		<u>Comment calculer une espérance et une variance d'une variable aléatoire à densité ?</u> Soit X une variable aléatoire de densité f. 1. Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente alors X admet une espérance mathématique : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ 2. Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est absolument convergente alors X admet un moment d'ordre 2 : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ On peut alors appliquer la formule de Koenig-Huygens pour obtenir la variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ <u>Attention :</u> $V(X) \neq \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ dans le cas général. Il ne faut pas confondre $V(X)$ et $E(X^2)$!!! <u>Remarque :</u> On en peut pas écrire $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ ou $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ avant d'avoir prouvé la convergence de ces intégrales.
Pr 12		<u>Théorème de transfert</u> <u>Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X :</u> Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ alors, sous réserve de convergence absolue, $E(\varphi(X)) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$ <u>Dans le cas d'une variable aléatoire X à densité, de densité f :</u> Si φ est une fonction continue sur $X(\Omega)$ alors, sous réserve de convergence absolue, $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t) dt$
Pr 13		<u>Comment démontrer qu'une fonction f est une densité d'une variable aléatoire ?</u> Il faut montrer : f est positive sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Pr 14		<u>Comment démontrer qu'une fonction F_X est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?</u> Il faut montrer : 1. F_X est croissante $\mathbb{R}$. 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ 3. F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs. 4. F_X est continue sur $\mathbb{R}$. <u>Une remarque importante :</u> Toute fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X vérifie : 1. F_X est croissante $\mathbb{R}$. 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ Donc, si vous savez déjà que X est une variable aléatoire, vous n'avez plus qu'à montrer : 3. F_X est continue sur $\mathbb{R}$. 4. F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs.
Pr 15		<u>Comment déterminer une fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X à partir de sa densité f ?</u> Il faut calculer une intégrale : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ <u>Remarque :</u> Si la densité d'une variable aléatoire est définie sur n intervalles, il en sera de même de sa fonction de répartition.
Pr 16		<u>Comment déterminer une densité f d'une variable aléatoire X à partir de sa fonction de répartition F_X ?</u> Vous savez généralement qu'on peut retrouver une densité f de X en dérivant F_X : En tout point a où F_X est de classe C^1, $F_X'(a) = f(a)$. Mais n'oubliez pas que pour tout réel b en lequel F_X n'est pas dérivable vous devez donner à $f(b)$ une valeur (n'importe laquelle !!!, ça n'a pas d'importance). C'est souvent le cas lorsque F_X est définie par intervalles. Prenons un exemple : Si on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F_X par $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. On peut montrer que cette fonction est bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. En particulier, F_X est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$, sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On obtiendra donc une densité f de X en dérivant F_X sur chacun de ces intervalles et en donnant des valeurs quelconques à $f(0)$ et $f(1)$.

Pr 17		<u>Comment déterminer une probabilité à l'aide de la fonction de répartition ?</u> Rappelons que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$. • Si X est une variable aléatoire discrète, on cherche généralement la probabilité en une valeur entière k de $X(\Omega)$: $\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = F_X(k) - F_X(k - 1)$ • Si X est une variable aléatoire à densité, on cherche des probabilités sur des intervalles de la forme $]-\infty ; a]$, $[a ; b]$ ou $[b ; +\infty[$: ➤ $P(X \in]-\infty ; a]) = P(X \leq a) = F_X(a)$ ➤ $P(X \in [a ; b]) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ ➤ $P(X \in [b ; +\infty[) = P(X \geq b) = 1 - P(X < b) = 1 - F_X(b)$ <u>Remarque :</u> Pour les variables aléatoires à densité, on a tous les réels a, $P(X = a) = 0$. Ainsi les probabilités sur des intervalles ouverts ou fermés sont identiques. <u>Exemples :</u> $P(X \leq a) = P(X < a)$, $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$ $P(X \geq b) = P(X > b)$...
Pr 18		<u>Lois du $\min(X, Y)$ et du $\max(X, Y)$</u> Soient X et Y sont deux variables aléatoires. Si on pose $m = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$, alors pour tout réel x on a : $P(m \geq x) = P(X \geq x \cap Y \geq x)$ $P(M \leq x) = P(X \leq x \cap Y \leq x)$ <u>Dans le cas (fréquent) où X et Y sont indépendantes, on a :</u> $P(m \geq x) = P(X \geq x)P(Y \geq x)$ $P(M \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x)$ On utilise alors les fonctions de répartitions de X et Y pour obtenir celles de m et M. <u>Pour les variables discrètes</u>, le travail n'est pas fini : vous devez trouver les lois de m et M c'est-à-dire $P(m = k)$ et $P(M = k)$ pour tout k dans le support de m ou de M. Pour tout entier k de $m(\Omega)$, on a : $P(m = k) = P(m \geq k) - P(m \geq k + 1)$ Pour tout entier k de $M(\Omega)$, on a : $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k - 1)$
Pr 19		<u>Les lois uniformes pour les variables aléatoires discrètes</u> Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si : $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$ On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On a alors : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ <u>Attention :</u> Ne confondez pas les lois uniformes de variables aléatoires discrètes et à densité.

Pr 20		<u>Les lois de Bernoulli</u> Soit p un réel compris entre 0 et 1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si : $X(\Omega) = \{0; 1\} \text{ et } P(X = 1) = p.$ On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ On a alors : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ avec $q = 1 - p$
Pr 21		<u>Les lois binomiales</u> Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si : $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p$ On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ On a alors : $E(X) = np \text{ et } V(X) = npq \text{ avec } q = 1 - p$
Pr 22		<u>Les lois géométriques</u> On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1} p \text{ avec } q = 1 - p.$ On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On a alors : $E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{q}{p^2} \text{ avec } q = 1 - p.$
Pr 23		<u>Les lois de Poisson</u> On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si : $X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On a alors : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$. <u>Attention :</u> Ne confondez pas les espérances et variances des lois exponentielles et de Poisson.
Pr 24		<u>Confusions entre les lois binomiales et géométriques.</u> Rappelons quelques différences : Soient X et Y des variables aléatoires qui suivent respectivement les lois $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{G}(p)$. X compte le nombre de succès sur n épreuves, Y le rang du premier succès. Leurs supports sont donc différents : $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On parle de schéma de Bernoulli uniquement dans une configuration de loi binomiale.

Les lois uniformes pour les variables aléatoires à densités

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

- Sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [a; b], f(x) = \frac{1}{b-a} \\ \forall x \notin [a; b], f(x) = 0 \end{cases}$$
- Sa fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$.

Remarque : Si l'une des conditions est réalisée, X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ et donc l'autre condition est réalisée.

Propriétés : Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, alors :

- X admet une espérance mathématique : $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- X admet une variance : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Attention : Ne confondez pas les lois uniformes de variables aléatoires discrètes et à densité.

Pr 25

Les lois normales

➤ Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 ($\sigma > 0$) si

sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{N}^\circ(m; \sigma^2)$.

On a alors : $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

➤ Si X suit la loi normale $\mathcal{N}^\circ(m; \sigma^2)$ (avec $\sigma > 0$) alors la variable aléatoire

$T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}^\circ(0; 1)$.

➤ La fonction de répartition Φ de la loi normale $\mathcal{N}^\circ(0; 1)$ vérifie, pour tout x réel :

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

$$\forall x \geq 0, \quad P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$$

Pr 26

Pr 27		<u>Les lois exponentielles</u> Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ ssi l'une des deux conditions suivantes est réalisée : - Sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ - Sa fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ On le note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. <u>Remarque :</u> Si l'une des conditions est réalisée, X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et donc l'autre condition est réalisée. <u>Propriétés :</u> Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors : X admet une espérance mathématique : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ X admet une variance : $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ <u>Attention :</u> Ne confondez pas les espérances et variances des lois exponentielles et de Poisson.
Pr 28		Que signifie : « donnez la loi de X » ? - Si X est une variable aléatoire discrète, vous devez donner : - Son support $X(\Omega)$ - Pour tout k de $X(\Omega)$, la valeur ou l'expression de $P(X = k)$ - Si X est une variable aléatoire à densité, vous devez donner sa fonction densité <u>ou</u> sa fonction de répartition. <u>Remarques :</u> 1. Il n'est pas rare que la loi de X soit une loi usuelle. Il faut donc bien les connaître car alors $E(X)$ et $V(X)$ sont données par des formules de cours. 2. N'oubliez pas de vérifier le support lorsque vous voulez affirmer qu'une variable aléatoire suit une loi. <u>Par exemple :</u> Montrer que $P(X = k) = q^{k-1}p$ avec $q = 1 - p \in [0; 1]$ ne suffit pas à justifier que X suit la loi géométrique de paramètre p. Il faut aussi vérifier que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Pr 29		<u>L'espérance mathématique est linéaire mais pas la variance</u> <u>Quelques relations à connaître :</u> Si X et Y sont deux variables aléatoires et a et b deux réels, on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ Mais pour la variance on a : $V(aX + b) = a^2V(X)$. L'égalité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ n'est pas vraie en général. Elle est vraie si X et Y sont indépendantes.

Pr 30		Rappelons que $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Nous savons que <u>lorsque X et Y sont indépendantes,</u> $cov(X, Y) = 0$ et donc <u>$E(XY) = E(X)E(Y)$.</u> Cette égalité n'est donc pas vraie dans le cas général et ne fait pas partie des relations que nous avons avec la linéarité de l'espérance mathématique.

Références	Nombre d'erreurs	Description des erreurs ou oublis